

"Stochastic modelling and derivatives in traditional markets and in crypto-markets"

Emmanuel Gobet

TD 9 - 17 janvier 2026

Exercice 1 (Pricing et couverture d'une option d'échange entre actifs - Margrabe formula 1978). Dans un marché contenant deux actifs risqués S_t^1 et S_t^2 et un taux d'intérêt sans risque r , on considère une option d'échange entre S^2 et S^1 . Son payoff, payé à la date T , s'écrit

$$(S_T^1 - K S_T^2)^+$$

pour une constante $K > 0$ fixée.

En supposant un modèle de Black-Scholes bidimensionnel pour les deux actifs et en construisant une stratégie de couverture en delta basée sur les deux actifs et sur le taux sans risque r , nous savons que la valeur du portefeuille autofinçant (et donc le prix de l'option d'échange) est générée par le processus suivant :

$$\begin{aligned} dS_t^1 &= r_t S_t^1 dt + S_t^1 \sigma_1 dW_t^1 \\ dS_t^2 &= r_t S_t^2 dt + S_t^2 \sigma_2 (\rho dW_t^1 + \sqrt{1 - \rho^2} dW_t^2), \end{aligned}$$

où $(W_t^1, W_t^2)_{t \geq 0}$ est un mouvement Brownien standard à composantes indépendantes (sous la probabilité risque-neutre $\mathbb{Q}$), $\sigma_1 > 0$ et $\sigma_2 > 0$ sont deux paramètres de volatilité, et $\rho \in (-1, 1)$ est un paramètre de corrélation.

1. Identifier les vecteurs de volatilité $\sigma_t^1 \in \mathbb{R}^2$ et $\sigma_t^2 \in \mathbb{R}^2$ pour les deux actifs, et leurs vols spot respectives.
2. En utilisant une technique de changement de numéraire (avec l'actif S^2 comme numéraire), donner une formule pour le prix en tout $t \leq T$ de l'option d'échange dans ce modèle.
3. En déduire la stratégie de couverture dynamique de l'option : de quels instruments est composé le portefeuille de couverture ?

Exercice 2 (Relation de symétrie Call-Put). The dynamic of the price of an asset paying continuous dividend satisfies the stochastic differential equation

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - q)dt + \sigma dW_t,$$

where W is a 1-dimensional Brownian Motion under the risk neutral measure $\mathbb{Q}$, σ is a strictly positive constant, r is the constant interest rate, and q is the dividend/repo rate. In this problem, we will prove the Call-Put symmetry

$$\text{Call}(0, S_0 e^{-\nu T}; T, K) = \text{Put}(0, K e^{-\nu T}; T, S_0), \quad \nu = r - q,$$

where $\text{Call}(x, T, k)$ (respectively $\text{Put}(x, T, k)$) is the price of a call (respectively put) at time 0 with maturity T , spot x and strike k , with an asset paying dividends at rate q and with an interest rate r .

1. Justify that the spot price and the forward price for receiving S_T at T are respectively

$$C_t(S_T, T) = S_t e^{-q(T-t)}, \quad F_t(S_T, T) = S_t e^{\nu(T-t)}.$$

2. Show that

$$X_t = C_t(S_T, T)$$

can be used as a numéraire and that the price of $\text{Call}(0, x; T, k)$ is equal to

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^X} [e^{-qT} (x - \frac{kx}{S_T})_+]$$

where $\mathbb{E}_{\mathbb{Q}^X}$ is the expectation under the measure related to the numéraire X . Here $x = S_0$.

3. Let $W_t^X := W_t - \sigma t$. Write down the formula for $\frac{kx}{S_T}$ as an exponential of W_T^X .
4. Using the fact that W_t^X is a Brownian motion under $\mathbb{Q}^X$, prove the Call-Put symmetry.

Exercice 3 (Option asiatique sur moyenne géométrique). In this exercise, we show how the technique of numéraire change can efficiently be applied to compute the price of some Asian option. Assume that the market offers a constant interest rate r and that the price of an asset (under the risk-neutral probability) is given by

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma dW_t.$$

We compute the price of the discrete geometric Asian option payoff, with floating strike :

$$\Psi_T := \left(\left(\prod_{i=1}^n S_{t_i} \right)^{1/n} - K S_T \right)_+,$$

where $t_0 = 0 < \dots < t_i := i \frac{T}{N} < \dots < T$.

1. Applying a change of numeraire, show that the price of the Asian option at time 0 can be expressed as

$$\mathbb{E}[(C_1 \exp(\mathcal{N} + C_2 T) - C_3 K)_+]$$

for a Gaussian random variable $\mathcal{N}$ and for constants C_1, C_2, C_3 . The parameters of $\mathcal{N}$ and the constants are to be given explicitly.

2. Deduce a explicit formula for the option price.
3. Extend the analysis to the case when the payoff equals $\Psi_T := (\exp(\frac{1}{T} \int_0^T \ln S_t dt) - K S_T)_+$.